E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. LYON - I.S.E.M. - I.S.E.N. - I.S.E.P.
Ecoles associées : E.I.S.T.I. - ECOLE LOUIS DE BROGLIE

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1993

SERIE P

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée.
Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.
"L'usage de la calculatrice est autorisé".

Ce problème traite des polynômes trigonométriques du point de vue de l'algèbre linéaire et de l'analyse et utilise la notion de série de Fourier.

I. Polynômes trigonométriques en algèbre linéaire

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, les a_k et b_k étant des réels et n un entier supérieur ou égal à 1, fixé.

On note E^* le dual de E.

1) Montrer que $(h,g) \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\, g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur E.

2) Soient les fonctions $e_0, \ldots, e_{2n}$ définies par :
$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_1(t) = \sin t$, $e_2(t) = \cos t$, $\ldots$, $e_{2n-1}(t) = \sin nt$

et $e_{2n}(t) = \cos nt$.

Montrer que $(e_0, \ldots, e_{2n})$ est une base de E, orthonormale pour le produit scalaire précédent.

Donner l'expression de la norme d'un élément de E en fonction des a_k et b_k.

3) Soit h un élément de E. On pose : $\forall g \in E \quad h^*(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\, g(t)\, dt$.

a) Montrer que : $h^* \in E^*$.

b) Montrer que si φ est un élément de E^*, alors il existe un unique élément h de E tel que $\varphi = h^*$.

II. Un calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1) Soit θ un réel tel que $\sin\theta \neq 0$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin(2n+1)\theta = (\sin\theta)^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_{2n+1}^{2k+1} \, (\cotan\theta)^{2n-2k}.$$

2) Si n est un entier supérieur ou égal à 1, trouver les solutions positives de l'équation :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, C_{2n+1}^{2k+1} \, x^{n-k} = 0$$

et déterminer la somme de ces solutions en fonction de n.

3) Etablir : $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$.

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{3} n\,(2n-1) < \sum_{p=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{p^2\pi^2} < \frac{1}{3} n\,(2n+2)$

et en déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

5) Application :

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\frac{x^n}{n} \ln x \text{ si } x \neq 0$$
$$0 \text{ si } x = 0$$

Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur [0,1] et préciser sa somme.

b) Montrer que $\int_0^1 \ln x \, \ln(1-x)\, dx$ converge et déterminer sa valeur.

III. Polynômes trigonométriques en analyse

Dans toute cette partie h désigne la fonction réelle 2π-périodique de la variable réelle telle que :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} \quad \text{pour } x \in]0,2\pi[\\ h(0) = h(2\pi) = 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que h est impaire. Donner l'expression de la série de Fourier S(h) de h en cosinus et sinus.

b) Justifier la convergence simple de S(h) sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa somme ?

c) La convergence de S(h) est-elle uniforme sur $[0,2\pi]$?

d) Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) Dans la suite on pose, pour tout entier n et tout réel x

$D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

a) Montrer que pour $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$D_n(x) = \frac{\sin (2n+1)\dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin (2n+1)t}{\sin t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

3) Si f désigne une fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $[0,2\pi]$ on pose, pour tout x réel,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)\, e^{ikx} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{avec } C_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt.$$

a) Etablir : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{x-2\pi}^{x} f(x-t)\, D_n(t)\, dt.$

b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) - S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} (f(x)-f(x-t))\, D_n(t)\, dt.$$

4) Montrer que :

$$\forall x \in]0,2\pi[\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad h(x) - S_n(h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} - \frac{t}{2} D_n(t)\, dt.$$

5) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est paire, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que g ne s'annule pas sur $[0,\pi[$.

6) Pour $\theta \in]0,\pi]$, on pose $I(\theta) = \left[-\pi + \frac{\theta}{2}, \pi - \frac{\theta}{2}\right]$ et

$$M(\theta) = 2 \sup_{x \in I(\theta)} \left|\frac{1}{g(x)}\right| + \pi \sup_{x \in I(\theta)} \left|\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right|$$

où g désigne la fonction précédente.

a) Justifier l'existence de $M(\theta)$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [\theta, 2\pi-\theta] \quad |h(x) - S_n(h)(x)| \leqslant \dfrac{M(\theta)}{(2n+1)\pi}$.

7) Montrer que la série de Fourier S(h) de h converge uniformément sur tout intervalle $[\theta, 2\pi-\theta]$ avec $\theta \in]0,\pi]$.
